Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS Tourisme

Mathématiques - Groupement B

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Fermeture d'un tiroir : équation différentielle et étude de fonction (12 questions) **Page 3**

2. Série de Fourier d'une fonction paire périodique (10 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://coursbtstourisme.fr/assets/annales/bts-tourisme/E2 - Mathématiques/2023/BTS Tourisme - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf

1. Fermeture d'un tiroir : équation différentielle et étude de fonction

La distance entre le fond d'un tiroir et celui du meuble est modélisée par une fonction f du temps, exprimée en centimètres, tandis que le temps est exprimé en secondes. L'exercice étudie cette évolution par une équation différentielle, une fonction exponentielle, un algorithme et le calcul d'une position moyenne.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre l'équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.

On factorise le trinôme : $r^2 + 5r + 4 = (r + 1)(r + 4)$. Un produit est nul si l'un de ses facteurs est nul. On résout donc séparément $r + 1 = 0$ et $r + 4 = 0$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $r = -1$ ou $r = -4$.

Question 1.b. À l'aide du tableau fourni et des solutions de l'équation caractéristique, résoudre l'équation différentielle y'' + 5y' + 4y = 0.

L'équation caractéristique a deux racines réelles distinctes, -1 et -4. Le tableau fourni associe alors à l'équation différentielle une combinaison linéaire des exponentielles de ces racines. Les constantes sont réelles et arbitraires.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Partie A - Conditions initiales et distance

Question 2.a. À partir de la situation à l'instant t = 0, déterminer f(0) et f'(0).

À l'instant initial, la distance entre M et O est de 20 cm : c'est la valeur de $f(0)$. La vitesse de déplacement est la dérivée de cette distance. Comme le tiroir se rapproche de O, elle est négative et vaut -10 cm·s^{-1}.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(0) = 20$ cm et $f'(0) = -10$ cm·s^{-1}.

Question 2.b. Sachant que f(t) = (70/3)e^(-t) - (10/3)e^(-4t), déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.

On évalue la fonction donnée à l'instant $t = 2$: $f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$. Puisque $f(t)$ représente la distance OM, cette expression exacte, en centimètres, répond à la question. Elle vaut environ $3,157$ cm.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$OM = \left(\frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}\right)$ cm.

Question 2.c. Le tiroir est dit fermé lorsque la distance OM est inférieure à 0,5 cm. Le constructeur affirme qu'il est fermé en moins de 4 secondes. Dire s'il a raison et justifier.

Pour établir que le tiroir est fermé avant 4 secondes, on évalue sa distance à $t = 3,9$ s, juste avant cette échéance : $f(3,9) = \frac{70}{3}e^{-3,9} - \frac{10}{3}e^{-15,6} \approx 0,472$ cm. Cette distance est déjà inférieure au seuil de $0,5$ cm.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Oui : le tiroir est fermé à $3,9$ s, donc en moins de 4 s.

Partie B - Étude de fonction

Question 1.a. En utilisant la limite de e^(-u) lorsque u tend vers +∞, déterminer la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞.

Quand $t \to +\infty$, on a $e^{-t} \to 0$ et $e^{-4t} \to 0$, en appliquant la limite rappelée dans le sujet. Les deux termes de $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$ tendent donc vers zéro, et leur différence aussi.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

Question 1.b. Déduire de la limite précédente que la courbe représentative de f possède une asymptote et en donner une équation.

La limite de $f(t)$ en $+\infty$ est finie et égale à zéro. Par définition, la courbe représentative admet alors une asymptote horizontale d'ordonnée zéro. Son équation est celle de l'axe des abscisses.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale en $+\infty$: $y = 0$.

Question 2.a. Déterminer l'expression de la dérivée f'(t) pour tout t appartenant à [0 ; +∞[.

On dérive chaque exponentielle avec la règle $(e^{at})' = ae^{at}$. Ainsi, le coefficient $\frac{70}{3}$ donne $-\frac{70}{3}e^{-t}$, tandis que le terme soustrait $\frac{10}{3}e^{-4t}$ donne $+\frac{40}{3}e^{-4t}$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}$.

Question 2.b. Sachant que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[, en déduire le tableau de variations de f sur cet intervalle.

La dérivée est négative sur l'intervalle considéré : f y est donc strictement décroissante. À la borne gauche, $f(0) = \frac{70}{3} - \frac{10}{3} = 20$. Quand t tend vers $+\infty$, $f(t)$ tend vers zéro.

t	**0**	$+\infty$
$f(t)$	20	$\searrow$ 0

✓ RÉPONSE À RETENIR

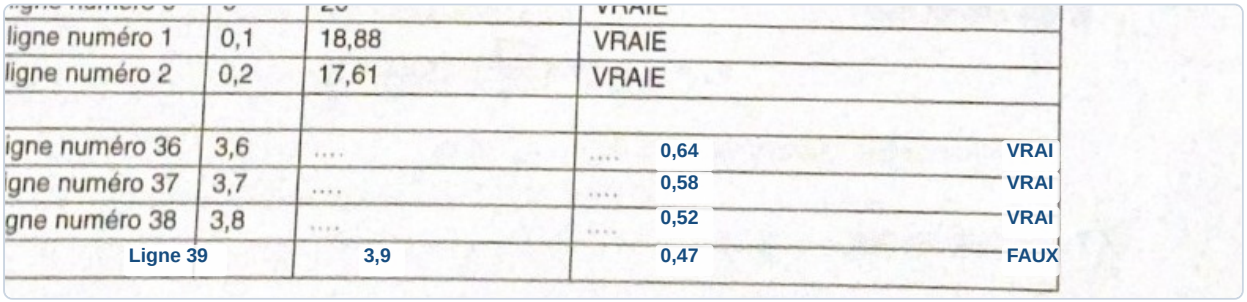
f décroît strictement de 20 vers 0 sur $[0; +\infty[$.

Question 3.a. Compléter le tableau à partir de la ligne numéro 36, en indiquant les valeurs de t, f(t) arrondie au centième et le résultat du test de l'algorithme. Ajouter les lignes nécessaires jusqu'à l'arrêt de l'algorithme.

À chaque ligne, le temps augmente de $0,1$ seconde. On calcule $f(t)$, on l'arrondit au centième, puis on teste la valeur non arrondie contre $0,5$. Le test reste vrai tant que la distance dépasse ce seuil et devient faux à la première ligne qui le franchit.

Ligne	t	$f(t)$**, au centième**	**Test**
36	3,6	0,64	VRAI
37	3,7	0,58	VRAI
38	3,8	0,52	VRAI
39	3,9	0,47	FAUX

Tableau de l'algorithme complété



✓ RÉPONSE À RETENIR

L'algorithme s'arrête à la ligne 39, pour $t = 3,9$.

Question 3.b. Donner la valeur de la variable t à la fin de l'exécution de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte de la fermeture du tiroir.

À $t = 3,8$, la distance arrondie est encore de $0,52$ cm : le test reste vrai. À $t = 3,9$, la distance vaut environ $0,47$ cm, donc le test devient faux et la boucle s'arrête. Le tiroir a alors atteint le seuil de fermeture.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $t = 3,9$ s : le tiroir est fermé, car $OM < 0,5$ cm.

Question 4. La position moyenne est définie par m = (1/4)∫₀⁴ f(t)dt. Démontrer que m = 45/8 - (35/6)e^(-4) + (5/24)e^(-16).

Une primitive de f est $F(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{5}{6}e^{-4t}$. Ainsi, $m = \frac{1}{4}\big(F(4) - F(0)\big)$. En remplaçant les bornes, les termes constants donnent $\frac{45}{8}$, et les termes exponentiels donnent l'expression indiquée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $$m = \frac{45}{8} - \frac{35}{6}e^{-4} + \frac{5}{24}e^{-16}.$$

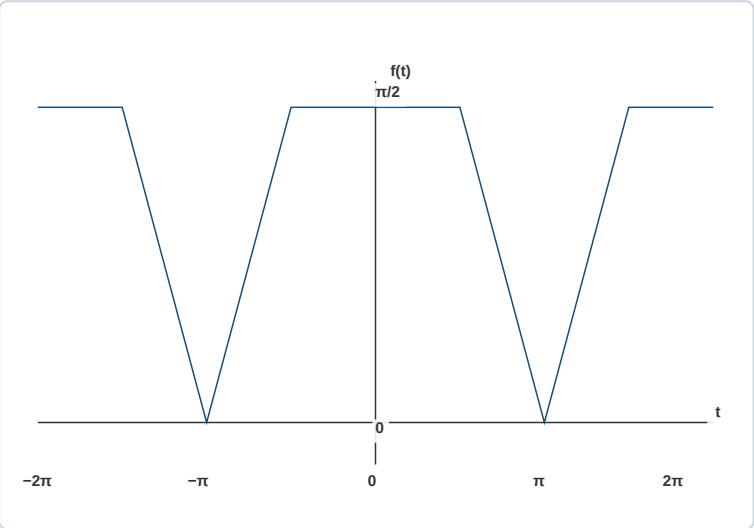
2. Série de Fourier d'une fonction paire périodique

La fonction étudiée est paire et périodique de période 2π, définie par morceaux sur [0 ; π]. L'exercice demande de la représenter, de déterminer ses coefficients de Fourier et d'étudier une somme partielle ainsi qu'une approximation de sa valeur efficace.

Question 1. Sur le document-réponse, tracer la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle [-2π ; 2π].

Sur une période centrée en 0, la fonction vaut $\pi/2$ entre $-\pi/2$ et $\pi/2$. Elle décroît ensuite linéairement jusqu'à 0 en $\pm\pi$. La fonction étant paire et de période 2π, on répète ce motif par symétrie puis par translations de période. Le tracé ci-dessous couvre ainsi l'intervalle demandé, avec les niveaux 0 et $\pi/2$.

Représentation de f sur [-2π ; 2π]



✓ RÉPONSE À RETENIR

Graphe de f sur $[-2\pi; 2\pi]$: voir le tracé.

Question 2. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, le coefficient de Fourier b_n est nul.

La fonction f est paire. Pour tout entier $n \geq 1$, la fonction $t \mapsto \sin(nt)$ est impaire ; le produit $f(t)\sin(nt)$ est donc impair. Ce produit est de période 2π, et son intégrale sur une période peut se calculer sur $[-\pi; \pi]$. L'intégrale d'une fonction impaire sur cet intervalle symétrique est nulle, donc le coefficient sinus s'annule.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour tout $n \geq 1$, $b_n = 0$.

Question 3. **Déterminer la pulsation ω associée à la fonction f.**

Le formulaire donne la relation entre la période T et la pulsation : $\omega = \frac{2\pi}{T}$. La période indiquée dans l'énoncé est 2π. En substituant cette valeur, on obtient $\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$. Ainsi, les arguments des fonctions trigonométriques dans les coefficients sont bien nt, comme dans les intégrales demandées ensuite.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\omega = 1$.

Question 4. **Démontrer que le coefficient a_0 est égal à $3\pi/8$.**

Le formulaire donne $a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$. Avec $T = 2\pi$ et la parité de f, cela devient $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(t)\,dt$. On utilise ensuite les deux expressions définies sur $[0;\pi]$: $f(t) = \pi/2$ jusqu'à $\pi/2$, puis $f(t) = \pi - t$. Les deux intégrales valent $\pi^2/4$ et $\pi^2/8$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $a_0 = \frac{3\pi}{8}$.

Question 5. **Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, a_n = ∫₀^(π/2) cos(nt)dt + (2/π)∫_(π/2)^π (π - t)cos(nt)dt.**

Pour une fonction paire, le formulaire donne $a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\,dt$. En prenant $T = 2\pi$ et $\omega = 1$, on obtient $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos(nt)\,dt$. On découpe cette intégrale en $[0;\pi/2]$ et $[\pi/2;\pi]$, puis on remplace $f(t)$ par ses expressions respectives.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $a_n = \int_0^{\pi/2}\cos(nt)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - t)\cos(nt)\,dt$.

Question 6. **On admet que $a_n = 2/(\pi n^2)(\cos(n\pi/2) - \cos(n\pi))$. Déterminer les valeurs exactes de a_1, a_2 et a_3.**

On substitue successivement $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$ dans la formule fournie. Pour les indices impairs, $\cos(n\pi/2) = 0$ et $\cos(n\pi) = -1$. Pour $n = 2$, ces valeurs sont respectivement -1 et 1. L'application de la formule donne les trois coefficients exacts ci-dessous.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $a_1 = \frac{2}{\pi}$, $\quad a_2 = -\frac{1}{\pi}$, $\quad a_3 = \frac{2}{9\pi}$.

Question 7. Déduire l'expression de la somme partielle $s_3(t) = 3\pi/8 + (2/\pi)\cos(t) - (1/\pi)\cos(2t) + (2/(9\pi))\cos(3t)$.

La somme partielle d'ordre 3 s'écrit $s_3(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{3} a_n \cos(nt)$, puisque les coefficients b_n sont nuls. On remplace a_0 par $3\pi/8$, puis a_1, a_2 et a_3 par leurs valeurs exactes obtenues à la question précédente. La somme donne directement l'expression demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $s_3(t) = \frac{3\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\cos(t) - \frac{1}{\pi}\cos(2t) + \frac{2}{9\pi}\cos(3t)$.

Question 8. Indiquer, sans justification, laquelle des trois courbes proposées correspond à la fonction s_3.

La consigne demande uniquement d'indiquer le numéro de la courbe correspondant à s_3, sans justification. Le choix s'effectue parmi les trois tracés reproduits dans le sujet. La réponse à reporter est le numéro de la courbe correspondante.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Courbe numéro 3.

Approximation de la valeur efficace

Question 9.a. Pour $P = (a_0)^2 + (1/2)((a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2)$, donner une valeur approchée de P à 10^{-4} près.

On remplace les coefficients par leurs valeurs exactes : $P = (3\pi/8)^2 + \frac{1}{2}\big((2/\pi)^2 + (-1/\pi)^2 + (2/(9\pi))^2\big)$. La somme des carrés des trois coefficients non constants vaut $409/(81\pi^2)$. Ainsi, $P = 9\pi^2/64 + 409/(162\pi^2)$. L'évaluation numérique, arrondie au dix-millième, donne la valeur demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P \approx 1{,}6437$.

Question 9.b. On admet que $F^2 = \pi^2/6$ et que P constitue une approximation de F^2. Choisir, parmi 0,1 %, 1 % et 10 %, le pourcentage d'erreur correspondant. Une seule réponse est attendue, sans justification.

La réponse demandée est un choix parmi les trois pourcentages proposés. La valeur efficace vérifie $F^2 = \pi^2/6$, tandis que l'approximation obtenue précédemment est $P \approx 1{,}6437$. Le pourcentage d'erreur relatif est d'environ $0{,}074\,\%$. Parmi les choix proposés, la valeur correspondante est $0{,}1\,\%$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> 0,1 %

SYNTHÈSE DE L'ÉPREUVE & RÉFÉRENTIEL • BTS TOURISME

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS Groupement B, session 2023, porte le code 23MATGRB2 et dure 2 heures. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Elle étudie la fermeture d'un tiroir par équation différentielle et analyse de fonction, puis une fonction périodique par séries de Fourier et approximation de valeur efficace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour une équation différentielle linéaire à coefficients constants, les racines de l'équation caractéristique déterminent la forme des solutions.
- Si f'(t) < 0 sur un intervalle, f y est décroissante ; une limite finie en +∞ donne une asymptote horizontale.
- La pulsation d'une fonction de période T est ω = 2π/T ; pour une fonction paire, les coefficients sinus b_n sont nuls.
- Pour une fonction paire, $a_n = (4/T)\int_0^{(T/2)} f(t)\cos(n\omega t)dt$ pour n ≥ 1.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les conditions initiales et les unités : f est une distance en centimètres et t est exprimé en secondes.
- Pour l'algorithme, suivre l'ordre des instructions et vérifier la condition après chaque incrément de t.
- Dans les séries de Fourier, distinguer le terme constant a_0 des coefficients a_n et utiliser la période indiquée.
- Pour le pourcentage d'erreur, comparer P à F^2 et exprimer l'écart relativement à la valeur de référence.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment déterminer la solution de l'équation différentielle du tiroir ?

On résout d'abord l'équation caractéristique $r^2 + 5r + 4 = 0$. Ses deux racines réelles distinctes donnent une solution générale de la forme $y(t) = C_1e^{(r_1t)} + C_2e^{(r_2t)}$. Les conditions initiales permettent ensuite de déterminer les constantes.

Q : Pourquoi les coefficients b_n de Fourier sont-ils nuls ici ?

La fonction est paire et le sinus est impair. Leur produit f(t)sin(nωt) est donc impair sur un intervalle symétrique, ce qui donne une intégrale nulle sur une période. Ainsi, tous les coefficients b_n sont nuls.

Q : Comment gérer le temps dans cette épreuve de deux heures ?

L'épreuve comporte deux exercices de 10 points. Répartissez le temps entre les deux exercices, traitez d'abord les questions accessibles et gardez un moment pour vérifier les calculs, les unités et le document-réponse.

Q : Quel coefficient faut-il retenir pour cette épreuve ?

Le sujet indique deux coefficients selon la spécialité : 1,5 pour Conception et industrialisation en microtechniques et 2 pour Électrotechnique. Le barème affiché attribue 10 points à chacun des deux exercices.

Sujet officiel associé (PDF) : https://coursbtstourisme.fr/assets/annales/bts-tourisme/E2 - Mathématiques/2023/BTS Tourisme - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf
Ressources BTS Tourisme : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.