Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques, groupement B des BTS

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2 pour toutes les spécialités sauf Traitement des matériaux (2 options) : 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Fermeture d'un tiroir : équation différentielle et étude de fonction (14 questions) **Page 3**

2. Probabilités et estimation dans un magasin de vélos (10 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://coursbtstourisme.fr/assets/annales/bts-tourisme/E2 - Mathématiques/2023/BTS Tourisme - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 1-Sujet.pdf

1. Fermeture d'un tiroir : équation différentielle et étude de fonction

La distance entre le fond du tiroir, repéré par M, et le fond du meuble, repéré par O, est modélisée en fonction du temps. L'exercice étudie cette fonction par une équation différentielle, ses variations, un algorithme et un développement limité afin d'analyser la fermeture du tiroir.

Partie A. Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre l'équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.

On factorise : $r^2 + 5r + 4 = (r + 1)(r + 4)$. Les solutions sont les valeurs qui annulent l'un des facteurs.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $r = -1$ ou $r = -4$.

Question 1.b. À l'aide du tableau fourni, résoudre l'équation différentielle y'' + 5y' + 4y = 0.

L'équation caractéristique a deux racines réelles distinctes, -1 et -4. La solution générale de l'équation différentielle est donc la combinaison des exponentielles correspondantes.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Question 2.a. Le point M est situé à 20 cm de O et se déplace vers O avec une vitesse initiale de -10 cm·s⁻¹. En déduire les valeurs de f(0) et f'(0).

La distance initiale vaut 20 cm. La vitesse initiale est la dérivée de cette distance par rapport au temps et est donnée comme négative.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(0) = 20$ cm et $f'(0) = -10$ cm·s^{-1}.

Question 2.b. En admettant que f(t) = (70/3)e⁻ᵗ - (10/3)e⁻⁴ᵗ, déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.

En remplaçant t par 2 dans la fonction donnée : $f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$. Cette distance est exprimée en centimètres.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $OM = f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$ cm.

Question 2. (suite). **Le tiroir est considéré fermé lorsque la distance OM est inférieure à 0,5 cm. Déterminer si le constructeur a raison d'affirmer que le tiroir est fermé en moins de 4 secondes, et justifier.**

À 4 secondes, $f(4) = \frac{70}{3}e^{-4} - \frac{10}{3}e^{-16} \approx 0,427$ cm, donc $f(4) < 0,5$. Puisque la distance décroît, le seuil est atteint avant 4 secondes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui, le constructeur a raison : le tiroir est fermé en moins de 4 secondes.

Partie B. Étude de fonction

Question 1.a. **Sachant que lim e^{-u} = 0 lorsque u tend vers +∞, déterminer lim f(t) lorsque t tend vers +∞.**

Les deux exponentielles e^{-t} et e^{-4t} tendent vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$. Leur combinaison tend donc également vers 0.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

Question 1.b. **Déduire de la limite précédente que la courbe représentative de f possède une asymptote, et en donner une équation.**

La limite de $f(t)$ en $+\infty$ est finie et égale à 0. La courbe admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote : $y = 0$.

Question 2.a. **Déterminer f'(t) pour tout t appartenant à [0 ; +∞[.**

On dérive chaque terme : $(e^{-t})' = -e^{-t}$ et $(e^{-4t})' = -4e^{-4t}$. Ainsi, $f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}$.

Question 2.b. **Sachant que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[, en déduire le tableau de variations de f sur cet intervalle.**

Comme $f'(t) < 0$, la fonction est strictement décroissante. Elle part de $f(0) = 20$ et tend vers 0.

t	**0**	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	20	$\searrow 0$

✓ RÉPONSE À RETENIR

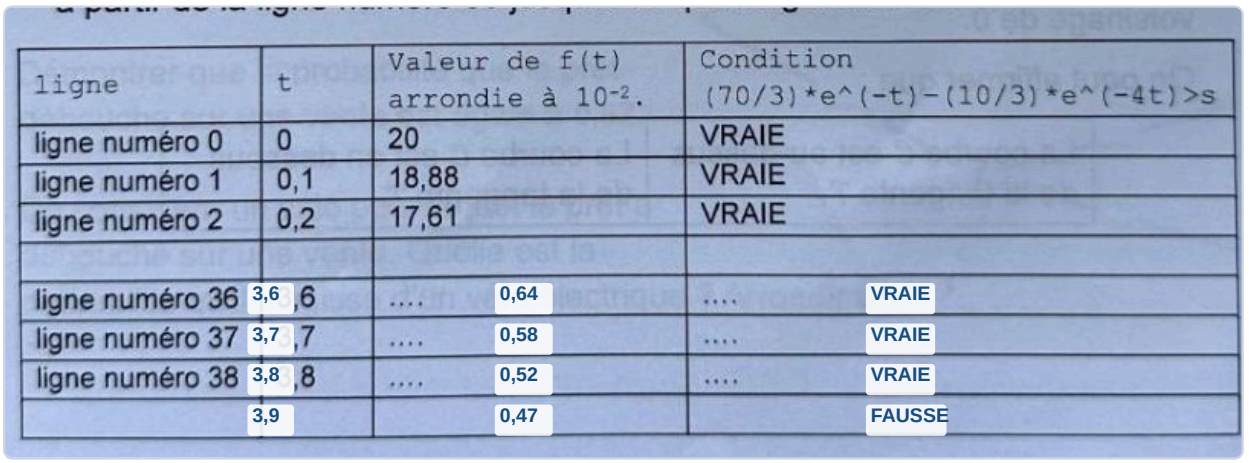
f décroît de 20 vers 0 sur $[0;+\infty[$.

Question 3.a. Compléter le tableau de suivi de l'algorithme à partir de la ligne numéro 36, en ajoutant des lignes si nécessaire et en poursuivant jusqu'à l'arrêt de l'algorithme. Indiquer les valeurs de f(t) arrondies à 10^{-2} et le résultat du test de la condition.

Le pas vaut 0,1 s et le test reste vrai tant que $f(t) > 0,5$. À 3,8 s, la distance dépasse encore le seuil ; à 3,9 s, elle lui devient inférieure.

Ligne	t	$f(t)$, **arrondi à** 10^{-2}	**Condition**
36	3,6	0,64	VRAIE
37	3,7	0,58	VRAIE
38	3,8	0,52	VRAIE
39	3,9	0,47	FAUSSE

Tableau de l'algorithme complété



✓ RÉPONSE À RETENIR

Le test devient faux à la ligne 39.

Question 3.b. **Donner la valeur de la variable t à la fin de l'exécution de l'algorithme, puis interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.**

L'algorithme augmente t de 0,1 tant que la distance dépasse 0,5 cm. Le test est encore vrai à 3,8 s, puis devient faux à 3,9 s : c'est la valeur de t à la fin de l'exécution.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $t = 3,9$ s : le tiroir est considéré fermé.

Question 4.a. **À partir du développement limité fourni par le logiciel, déterminer une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.**

Le logiciel donne le développement limité $f(t) = 20 - 10t - 15t^2 + o(t^2)$. La tangente en 0 est déterminée par les termes constant et linéaire.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $T : y = 20 - 10t$.

Question 4.b. **Parmi les propositions à choix multiples, recopier l'expression correcte du développement limité de f à l'ordre deux au voisinage de 0. Aucune justification n'est demandée.**

Parmi les propositions, il faut retenir celle dont le reste est $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 20 - 10t - 15t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$.

Question 4.c. **À partir du développement limité, indiquer si la courbe C est au-dessus ou en dessous de sa tangente T au voisinage de 0. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.**

Pour $t > 0$ proche de 0, l'écart entre la courbe et sa tangente vaut $-15t^2 + t^2\varepsilon(t)$, donc il est négatif.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La courbe $\mathcal{C}$ est en dessous de sa tangente T.

2. Probabilités et estimation dans un magasin de vélos

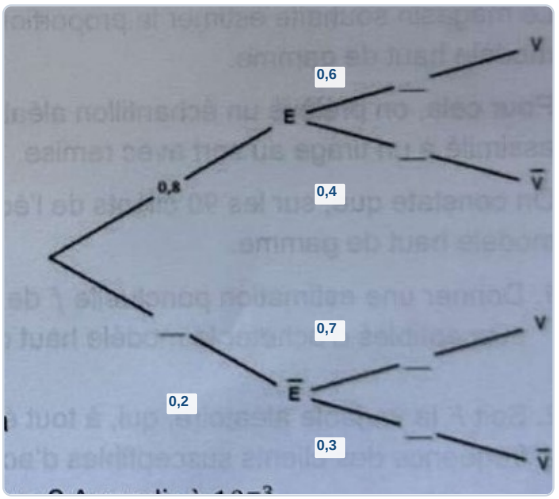
Un magasin de vélos étudie les prêts gratuits susceptibles de déboucher sur une vente selon que le vélo prêté est électrique ou mécanique. L'exercice traite aussi des durées de réparation dans un échantillon de vélos et de l'estimation de la proportion de clients intéressés par un modèle haut de gamme.

Partie A. Probabilités conditionnelles

Question 1. Recopier et compléter l'arbre pondéré représentant le type de vélo prêté et l'événement qu'un prêt débouche sur une vente, à partir des données fournies.

On complète chaque branche avec la probabilité de son événement. Le vélo est électrique avec une probabilité de 0,8 et mécanique avec une probabilité de 0,2. Après un vélo électrique, la vente a une probabilité de 0,6, donc la non-vente a une probabilité de 0,4. Après un vélo mécanique, les probabilités correspondantes sont 0,7 et 0,3. Les valeurs manquantes sont inscrites sur l'arbre du sujet.

Arbre pondéré complété



✓ RÉPONSE À RETENIR

Arbre complété : électrique 0,8, mécanique 0,2 ; vente/non-vente : 0,6/0,4 après électrique et 0,7/0,3 après mécanique.

Question 2. Déterminer la probabilité P(E ∩ V) que le vélo prêté soit électrique et que le prêt débouche sur une vente.

L'événement « vélo électrique et vente » correspond au chemin qui suit d'abord la branche électrique, puis la branche vente. La probabilité de ce chemin est le produit de la probabilité d'obtenir un vélo électrique et de la probabilité conditionnelle de vente sachant que le vélo est électrique : $P(E \cap V) = P(E) \times P_E(V) = 0,8 \times 0,6 = 0,48$. La probabilité cherchée est donc 0,48.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La probabilité que le vélo soit électrique et que le prêt débouche sur une vente est $P(E \cap V) = 0,48$.

Question 3. Démontrer que la probabilité qu'un prêt débouche sur une vente est égale à 0,62.

Les événements « vélo électrique » et « vélo mécanique » forment deux cas incompatibles et couvrent tous les prêts. La vente peut donc être obtenue par l'un ou l'autre de ces chemins. Après un vélo électrique, la probabilité du chemin de vente est $0,8 \times 0,6 = 0,48$. Après un vélo mécanique, elle est $0,2 \times 0,7 = 0,14$. En additionnant ces probabilités, on obtient $P(V) = 0,48 + 0,14 = 0,62$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité qu'un prêt débouche sur une vente est $P(V) = 0,62$, soit 62 %.

Question 4. Sachant que le prêt a débouché sur une vente, déterminer la probabilité qu'il s'agisse d'un vélo électrique. Arrondir à 10^{-3}.

On cherche la probabilité d'obtenir un vélo électrique sachant qu'il y a eu une vente. On utilise la formule de probabilité conditionnelle, avec la probabilité conjointe calculée précédemment et la probabilité totale de vente : $P_V(E) = \dfrac{P(E \cap V)}{P(V)} = \dfrac{0,48}{0,62} \approx 0,7741935$. L'arrondi au millième donne 0,774.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Sachant que le prêt a débouché sur une vente, la probabilité que le vélo soit électrique est environ $0,774$.

Partie B. Loi binomiale

Question 1. La variable aléatoire X compte, parmi 80 vélos réparés, ceux dont la réparation a nécessité moins d'une heure de main-d'œuvre. Sachant que X suit une loi binomiale, donner ses paramètres.

Une épreuve correspond à la réparation d'un vélo. Le succès retenu est « la réparation nécessite moins d'une heure », avec une probabilité de 0,62. Le nombre d'épreuves est égal au nombre de vélos réparés dans l'échantillon, soit 80. Comme l'énoncé indique que le nombre de succès suit une loi binomiale, ses paramètres sont le nombre d'épreuves et la probabilité de succès.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> La loi de X est $\mathcal{B}(80\,;\,0,62)$: ses paramètres sont $n = 80$ et $p = 0,62$.

Question 2. Déterminer la probabilité P(X = 40). Arrondir à 10^{-3}.

Pour une variable binomiale de paramètres $n = 80$ et $p = 0,62$, la probabilité d'obtenir exactement 40 réparations de moins d'une heure est $P(X = 40) = \binom{80}{40}(0,62)^{40}(1-0,62)^{40}$. Le calcul donne environ 0,008293. Arrondie au millième, cette probabilité vaut 0,008.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La probabilité d'obtenir exactement 40 réparations de moins d'une heure est $P(X = 40) \approx 0,008$, au millième.

Question 3. Déterminer la probabilité que le nombre de vélos nécessitant moins d'une heure de main-d'œuvre soit strictement supérieur au nombre de vélos nécessitant plus d'une heure. Arrondir à 10^{-3}.

Si X vélos nécessitent moins d'une heure, les autres, soit $80 - X$, nécessitent plus d'une heure selon le modèle binomial de l'exercice. L'inégalité demandée devient $X > 80 - X$, donc $X > 40$. Comme X est entier, il faut calculer $P(X \geq 41) = 1 - P(X \leq 40)$ pour $X \sim \mathcal{B}(80; 0,62)$. Le résultat est environ 0,981 au millième.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La probabilité que le nombre de réparations de moins d'une heure soit supérieur est $P(X \geq 41) \approx 0,981$, au millième.

Partie C. Intervalle de confiance

Question 1. Parmi les 90 clients de l'échantillon, 54 sont susceptibles d'acheter le modèle haut de gamme. Donner une estimation ponctuelle f de la proportion inconnue p.

L'estimation ponctuelle de la proportion inconnue est la fréquence observée dans l'échantillon. Il y a 54 clients susceptibles d'acheter le modèle haut de gamme parmi les 90 clients interrogés. On divise donc le nombre de réponses favorables par l'effectif total : $f = \dfrac{54}{90} = 0,6$. Cette fréquence fournit l'estimation ponctuelle de la proportion recherchée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

L'estimation ponctuelle est $f = 0,6$, soit une proportion estimée de 60 %.

Question 2.a. À l'aide de la formule fournie, déterminer un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 % pour la proportion p.

La formule fournie donne l'intervalle $[f - 1,96\sqrt{f(1-f)/n};\ f + 1,96\sqrt{f(1-f)/n}]$. Avec $f = 0,6$ et $n = 90$, la marge vaut $1,96\sqrt{0,6 \times 0,4/90} \approx 0,101214$. Les bornes sont donc environ 0,498786 et 0,701214. Arrondies au millième, elles donnent l'intervalle demandé.

✓ RÉPONSE À RETENIR

L'intervalle de confiance au niveau de 95 % est $[0,499\,;\ 0,701]$, soit environ 49,9 % à 70,1 %.

Question 2.b. Indiquer si l'on est certain que la proportion p appartient à l'intervalle de confiance obtenu.

Un intervalle de confiance au niveau de 95 % ne permet pas d'affirmer avec certitude que la proportion inconnue appartient à l'intervalle calculé. Ce niveau caractérise la méthode : sur un grand nombre d'échantillons, environ 95 % des intervalles ainsi construits contiendraient la proportion réelle. Pour l'échantillon observé, l'appartenance de p à cet intervalle n'est donc pas certaine.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non, on ne peut pas en être certain : le niveau de confiance est de 95 %, et non de 100 %.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, groupement B, session 2023, porte le code 23MATGRB1 et dure deux heures. Le coefficient est 2, sauf pour Traitement des matériaux, où il est 3. Les deux exercices portent sur la fermeture d'un tiroir et un magasin de vélos. Ils évaluent les équations différentielles, l'analyse, les algorithmes, les probabilités, la loi binomiale et l'estimation par intervalle de confiance.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants, les racines caractéristiques déterminent la forme de la solution générale.
- La tangente à la courbe de f au point d'abscisse a a pour équation $y = f(a) + f'(a)(t - a)$.
- Pour des événements A et B, $P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$ et P(B) se calcule avec la formule des probabilités totales.
- Une variable binomiale B(n,p) compte les succès de n essais indépendants ayant chacun la même probabilité p.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les unités et le signe de la vitesse initiale dans le modèle de fermeture du tiroir.
- Dans le suivi de l'algorithme, tester la condition à chaque valeur de t et s'arrêter dès qu'elle devient fausse.
- Pour une probabilité conditionnelle, identifier clairement l'événement qui conditionne le calcul.
- Un intervalle de confiance à 95 % ne garantit pas que la proportion inconnue appartient à l'intervalle obtenu.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle du tiroir ?

On résout d'abord l'équation caractéristique associée. Ses racines réelles distinctes donnent une solution générale composée d'exponentielles. Les conditions initiales permettent ensuite de déterminer les constantes.

Q : Comment traduire la comparaison du nombre de réparations de moins d'une heure et de plus d'une heure ?

Si X désigne le nombre de réparations de moins d'une heure parmi 80, le nombre de réparations de plus d'une heure est 80 - X. La comparaison demandée s'écrit $X > 80 - X$.

Q : Comment organiser les deux heures d'épreuve ?

L'épreuve comporte deux exercices de dix points. Répartissez le temps entre les deux, en gardant quelques minutes pour vérifier les calculs, les arrondis, les unités et les justifications demandées.

Q : Quelle précision faut-il donner pour les réponses numériques ?

Suivez l'arrondi indiqué dans chaque question : les probabilités de l'exercice 2 sont notamment demandées à 10^{-3}. Donnez une valeur exacte lorsqu'elle est exigée et précisez les unités dans le contexte du tiroir.

Sujet officiel associé (PDF) : https://coursbtstourisme.fr/assets/annales/bts-tourisme/E2 - Mathématiques/2023/BTS Tourisme - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 1-Sujet.pdf
Ressources BTS Tourisme : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.