Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS Tourisme

Mathématiques - BTS Groupement D1

Session 2022 • Code sujet : **22-MATGRD1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **Analyses de biologie médicale : 1 ; Bio analyses et contrôles : 2 ; Biotechnologies : 1 ; Europlastics et composites : 1,5 ; Bioqualité : 2**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Modélisation de l’évolution du nombre de personnes équipées d’un implant médical (13 questions) **Page 3**

2. Probabilités, pannes et contrôle de la qualité d’une machine à embouteiller (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu’il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://coursbtstourisme.fr/assets/annales/bts-tourisme/E2 - Mathématiques/2022/BTS Tourisme - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 3-Sujet.pdf

1. Modélisation de l'évolution du nombre de personnes équipées d'un implant médical

Dans un pays de 60 millions d'habitants, des données de 2013 à 2021 décrivent le nombre de personnes équipées d'un implant médical. Deux modèles distincts sont étudiés : un ajustement exponentiel et une fonction construite à partir d'une équation différentielle.

Partie A

Question 1. Compléter le tableau de l'annexe à rendre avec la copie en calculant les valeurs de y = ln(N - 30), arrondies au millième.

Pour chaque année, on applique la transformation demandée aux effectifs exprimés en milliers : **y = ln(N - 30)**. Les résultats, arrondis au millième, complètent la dernière ligne du tableau.

Année	Rang k	N (en milliers)	y
2013	0	56,25	3,268
2014	1	58,1	3,336
2015	2	60,5	3,418
2016	3	63	3,497
2017	4	65,8	3,578
2018	5	68,7	3,656
2019	6	72	3,738
2020	7	75,5	3,818
2021	8	79,3	3,898

✓ RÉPONSE À RETENIR

y : 3,268 ; 3,336 ; 3,418 ; 3,497 ; 3,578 ; 3,656 ; 3,738 ; 3,818 ; 3,898.

Question 2.a. À l'aide de la calculatrice, déterminer par la méthode des moindres carrés une équation de la droite d'ajustement du nuage de points $M_i(k_i ; y_i)$, sous la forme y = ak + b, avec a et b arrondis au centième.

On effectue la régression linéaire des neuf points dont les abscisses sont les rangs k de 0 à 8 et les ordonnées les valeurs de y calculées à la question précédente. La pente obtenue est environ 0,079 et l'ordonnée à l'origine environ 3,26. En arrondissant chaque coefficient au centième, on écrit la droite demandée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

y = 0,08k + 3,26.

Question 2.b. À partir de l'équation de la droite d'ajustement, déduire que le nombre de personnes équipées, exprimé en milliers et en fonction du rang k, peut être modélisé par N(k) = 30 + 26,05e^(0,08k).

1. La droite ajustée conduit à $\ln(N - 30) = 0{,}08k + 3{,}26$.
2. En exponentiant, $N - 30 = e^{3{,}26}e^{0{,}08k}$.
3. Or $e^{3{,}26} \approx 26{,}05$. Le modèle obtenu exprime N en milliers de personnes, comme dans l'énoncé.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $N(k) = 30 + 26{,}05e^{0{,}08k}$, en milliers.

Question 3.a. En supposant que le modèle proposé reste valide, déterminer au millier près le nombre de personnes équipées de l'implant en 2026.

Le rang de 2026 est k = 2026 - 2013 = 13. Avec le modèle donné, on calcule $N(13) = 30 + 26{,}05e^{0{,}08 \times 13} \approx 103{,}701$ milliers. Comme la valeur est exprimée en milliers, l'arrondi au millier près correspond à environ 104 000 personnes équipées.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> En 2026, environ 104 000 personnes équipées.

Question 3.b. Si le nombre d'habitants du pays reste stable sur le long terme, déterminer si le modèle étudié reste valide à long terme et justifier la réponse.

> Lorsque k tend vers +∞, le terme $e^{0{,}08k}$ tend vers +∞. Le modèle prévoit donc un effectif sans limite. Or la population du pays reste égale à 60 millions d'habitants : l'effectif équipé ne peut pas dépasser ce total. Le modèle exponentiel ne peut donc pas rester valide sur le long terme.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : le modèle finit par dépasser la population totale de 60 millions.

Partie B

Question 1.a. Résoudre sur [0 ; +∞[l'équation différentielle homogène (E_0) : y' + 0,05y = 0.

L'équation homogène se réécrit y' = -0,05y. Pour une équation de la forme y' = ay, la solution générale est $y(t) = Ce^{at}$, où C est une constante réelle. Ici, a = -0,05, et cette expression est définie sur [0 ; +∞[.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$y(t) = Ce^{-0,05t}$, avec C réel.

Question 1.b. Déterminer une solution constante de l'équation différentielle (E) : y' + 0,05y = 0,05.

1. On cherche une solution constante y(t) = c, dont la dérivée est nulle.
2. En substituant dans l'équation, 0,05c = 0,05, donc c = 1.
3. La constante égale à 1 est bien une solution particulière de (E).

✓ RÉPONSE À RETENIR

Une solution constante est y(t) = 1.

Question 1.c. Résoudre sur [0 ; +∞[l'équation différentielle (E) : y' + 0,05y = 0,05.

Une solution particulière de (E) est la constante 1. Toutes les solutions de l'équation complète s'obtiennent en ajoutant à cette solution une solution de l'équation homogène, déterminée en 1.a. On obtient ainsi la solution générale sur l'intervalle demandé.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$y(t) = 1 + Ce^{-0,05t}$, avec C réel.

Question 1.d. En utilisant la condition g(0) = 8, déduire une expression de la fonction g sur [0 ; +∞[.

Dans la solution générale, la condition initiale donne $g(0) = 1 + C = 8$, puisque $e^0 = 1$. Ainsi C = 7. En remplaçant la constante dans la solution générale, on obtient l'expression de g sur [0 ; +∞[.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$g(t) = 1 + 7e^{-0,05t}$.

Question 2. Selon le modèle f(t) = 450/(1 + 7e^(-0,05t)), où t est le temps en années depuis 2013 et f(t) est exprimée en milliers, déterminer au millier près le nombre de personnes équipées de l'implant en 2026.

En 2026, le temps écoulé depuis 2013 est t = 2026 - 2013 = 13 ans. On évalue alors $f(13) = 450/(1 + 7e^{-0,05 \times 13})$ ≈ 96,684 milliers. Après conversion en personnes, l'arrondi au millier près donne le résultat demandé.

✓ RÉPONSE À RETENIR

En 2026, environ 97 000 personnes équipées.

Question 3. Déterminer la limite de f en +∞ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

1. Quand t tend vers +∞, $e^{-0,05t}$ tend vers 0.
2. Le dénominateur de f(t) tend donc vers 1 et son numérateur reste 450.
3. f étant exprimée en milliers de personnes, la limite s'interprète comme l'effectif auquel le modèle se stabilise à long terme.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La limite est 450 milliers : 450 000 personnes équipées à long terme.

Question 4. À l'aide de l'expression fournie de f'(t), déterminer le sens de variation de f sur [0 ; +∞[et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

L'expression fournie est $f'(t) = 315e^{-0,05t} / (2(1 + 7e^{-0,05t})^2)$. Pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle est strictement positive et le dénominateur est positif. Ainsi, $f'(t) > 0$ sur l'intervalle : la fonction est strictement croissante. Dans le contexte, l'effectif prévu augmente avec le temps.

✓ RÉPONSE À RETENIR

f est strictement croissante : le nombre de personnes équipées augmente.

Question 5. Déterminer à partir de quelle année le nombre de personnes équipées de l'implant dépassera 120 000, soit 120 milliers, et expliquer la méthode employée.

Résoudre $f(t) > 120$ revient à obtenir $e^{-0,05t} < 2,75/7$, soit $t > 18,69$ environ. Comme t compte les années depuis 2013, les années entières à comparer sont t = 18 et t = 19. Le modèle donne moins de 120 milliers à t = 18, puis plus de 120 milliers à t = 19 : le seuil est donc dépassé en 2032.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Le nombre dépasse 120 000 à partir de 2032.

2. Probabilités, pannes et contrôle de la qualité d'une machine à embouteiller

Dans une usine, une machine à embouteiller est alimentée par un réservoir d'eau et une file de bouteilles vides. L'exercice porte sur les défauts d'approvisionnement, les pannes sur 200 jours et le contrôle statistique du volume d'eau dans les bouteilles.

Partie A - Défaut d'approvisionnement

Question Correspondance. En utilisant l'indépendance de A et B ainsi que P(A) = 0,03 et P(B) = 0,02, associer chacune des quatre phrases du tableau de gauche à l'information correspondante du tableau de droite. Écrire pour chaque réponse le numéro de la phrase et la lettre associée ; aucune justification n'est demandée.

La phrase 1 désigne le complément de A : sa probabilité vaut $1 - 0{,}03 = 0{,}97$, soit E. La phrase 2 décrit $A \cap \overline{B}$, soit C. Par indépendance, $P(A \cap B) = 0{,}03 \times 0{,}02 = 0{,}0006$: phrase 3, F. Enfin, un défaut correspond à $A \cup B$, donc $P(A \cup B) = 0{,}03 + 0{,}02 - 0{,}0006 = 0{,}0494$: phrase 4, D.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> 1-E ; 2-C ; 3-F ; 4-D.

Partie B - Pannes de la machine sur 200 jours

Question 1. La probabilité que la machine tombe en panne un jour quelconque est 0,025 et les pannes des différents jours sont indépendantes. Donner, sans justification, la loi de probabilité suivie par X, le nombre de jours de panne sur une période de 200 jours, et préciser ses paramètres.

Chaque jour correspond à une épreuve de Bernoulli : la panne survient avec une probabilité constante de $0{,}025$. Les pannes des jours considérés sont indépendantes. Ainsi, le nombre X de jours de panne parmi les 200 jours suit une loi binomiale, de paramètres le nombre d'épreuves et la probabilité de panne par jour.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $X \sim \mathcal{B}(200\,;\,0{,}025)$.

Question 2.a. La loi de X est approchée par une loi de Poisson de paramètre λ. Justifier que λ = 5.

Pour l'approximation d'une loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;\,p)$ par une loi de Poisson, le paramètre est $\lambda = np$. Avec $n = 200$ jours et $p = 0{,}025$, on obtient $\lambda = 200 \times 0{,}025 = 5$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lambda = 5$.

Question 2.b. **Pour Y suivant la loi de Poisson de paramètre λ = 5, donner la valeur de P(Y ≤ 10), arrondie à 10^{-3}.**

Pour une loi de Poisson de paramètre 5, on additionne les probabilités de $Y = 0$ à $Y = 10$: $P(Y \leq 10) = e^{-5} \sum_{k=0}^{10} \frac{5^k}{k!} \approx 0{,}9863047$. L'arrondi demandé au millième est donc $0{,}986$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(Y \leq 10) \approx 0{,}986$.

Question 2.c. **Le graphique suggère que P(Y = 15) est égale à 0. À l'aide de la formule fournie pour P(Y = k), déterminer si cette conjecture est vraie ou fausse et justifier.**

En appliquant la formule donnée avec $k = 15$ et $\lambda = 5$, on obtient $P(Y = 15) = \frac{5^{15} e^{-5}}{15!}$. Le numérateur et le dénominateur sont strictement positifs, donc cette probabilité est strictement positive. Sa faible valeur explique qu'elle paraisse nulle sur le graphique.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La conjecture est fausse : $P(Y = 15) \approx 0{,}000157$, donc cette probabilité n'est pas nulle.

Partie C - Qualité de l'embouteillement

Question 1. **À partir des volumes mesurés et des effectifs du tableau de l'échantillon de 100 bouteilles, déterminer à la calculatrice la moyenne x̄ et l'écart type σ de l'échantillon. Arrondir l'écart type à 10^{-2}.**

La moyenne pondérée par les effectifs est $\bar{x} = \frac{73 \times 17 + 74 \times 20 + 75 \times 43 + 76 \times 13 + 77 \times 7}{100} = 74{,}73$ cL. Le moment d'ordre 2 vaut $5585{,}79$, donc l'écart type de la série est $\sigma = \sqrt{5585{,}79 - 74{,}73^2} \approx 1{,}1032$ cL. Au centième, il vaut $1{,}10$ cL.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\bar{x} = 74{,}73$ cL et $\sigma \approx 1{,}10$ cL.

Question 2.a. **Pour le test bilatéral H_0 : m = 75 contre H_1 : m ≠ 75, sous H_0 la variable Z suit une loi normale d'espérance 75 et d'écart type 0,11. Déterminer un réel h tel que P(75 - h ≤ Z ≤ 75 + h) soit égal à 0,95 à 10^{-2} près.**

Sous H_0, la variable Z suit une loi normale d'espérance 75 et d'écart type $0{,}11$. L'intervalle central de probabilité 0,95 correspond à l'intervalle $[-1{,}96\,;\,1{,}96]$ pour la loi normale centrée réduite. Ainsi, $h = 1{,}96 \times 0{,}11 \approx 0{,}2156$, soit $0{,}22$ cL au centième.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$h \approx 0{,}22$ cL.

Question 2.b. Énoncer la règle de décision du test bilatéral au seuil de confiance de 95 %.

La règle consiste à comparer la moyenne de l'échantillon aux bornes de l'intervalle central sous H_0. Avec $h \approx 0{,}22$, ces bornes sont $75 - 0{,}22 = 74{,}78$ cL et $75 + 0{,}22 = 75{,}22$ cL. Une moyenne observée dans cet intervalle conduit à accepter H_0 au seuil de 5 %.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Accepter H_0 si $74{,}78 \leq \bar{x} \leq 75{,}22$ cL ; sinon, la rejeter.

Question 2.c. À partir des résultats de l'échantillon fourni, déterminer si l'hypothèse H_0 : m = 75 peut être acceptée.

La moyenne calculée pour l'échantillon est $74{,}73$ cL. La règle de décision accepte H_0 si cette moyenne est comprise entre $74{,}78$ cL et $75{,}22$ cL. Or $74{,}73 < 74{,}78$: la moyenne observée se situe dans la région de rejet.

✓ RÉPONSE À RETENIR

On rejette H_0 : $74{,}73$ cL est inférieur à $74{,}78$ cL.

SYNTHÈSE DE L'ÉPREUVE & RÉFÉRENTIEL • BTS TOURISME

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, Groupement D1, session 2022, code 22-MATGRD1, durée 2 heures, avec un coefficient dépendant de la spécialité, de 1 à 2. Les deux exercices, notés chacun sur 10, étudient la modélisation de l'équipement en implant médical et une machine à embouteiller. Les compétences mobilisées incluent ajustement, équations différentielles, probabilités et test statistique.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Le changement de variable $y = \ln(N - 30)$ transforme le modèle exponentiel étudié en une relation ajustable par une droite.
- Pour résoudre $y' + ay = c$, on combine une solution constante de l'équation complète et la solution générale de l'équation homogène.
- Avec n jours indépendants et une probabilité p de panne par jour, le nombre de pannes suit B(n, p) et peut être approché par Poisson de paramètre np.
- Un test bilatéral à 95 % compare la moyenne observée à l'intervalle central de probabilité 0,95 sous l'hypothèse nulle.

Points de vigilance & attentes du jury

- Les nombres de personnes des modèles sont exprimés en milliers : convertir les seuils et interpréter les résultats avec les bonnes unités.
- Repérer le rang k ou le temps t depuis 2013 avant toute prévision annuelle.
- Pour la loi de Poisson, respecter la borne de $P(Y \leq 10)$ et distinguer une probabilité nulle d'une probabilité très faible.
- Pour le test, utiliser la moyenne de l'échantillon, les bornes de l'intervalle et les arrondis explicitement demandés.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment utiliser le changement de variable de la partie A ?

Pour chaque valeur observée N, calculer $y = \ln(N - 30)$, puis arrondir au millième. Ajuster ensuite les points (k ; y) par une droite et utiliser son équation pour retrouver le modèle en N.

Q : Pourquoi le nombre de pannes peut-il être approché par une loi de Poisson ?

Le nombre de jours de panne suit d'abord une loi binomiale de paramètres 200 et 0,025. L'approximation de Poisson utilise $\lambda = np$, soit 5, car le nombre d'essais est grand et la probabilité de panne par jour est faible.

Q : Comment organiser les deux heures d'épreuve et le barème ?

L'épreuve dure 2 heures et comporte deux exercices de 10 points. Répartissez le temps entre les questions et gardez quelques minutes pour vérifier les calculs, les unités, les arrondis et les réponses demandées.

Q : Quels critères sont importants pour la réponse au test de qualité ?

Il faut identifier les hypothèses H_0 et H_1, déterminer l'intervalle central à 95 %, puis comparer la moyenne observée à ses bornes. La conclusion doit préciser si H_0 est acceptée dans le contexte du réglage de la machine.

Sujet officiel associé (PDF) : https://coursbtstourisme.fr/assets/annales/bts-tourisme/E2 - Mathématiques/2022/BTS Tourisme - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 3-Sujet.pdf

Ressources BTS Tourisme : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.