Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS Tourisme

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Modélisation et étude de la vitesse d'un chariot pendant son freinage (12 questions) **Page 3**

2. Transformées de Laplace et réponse d'un système électrique (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://coursbtstourisme.fr/assets/annales/bts-tourisme/E2 - Mathématiques/2022/BTS Tourisme - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

1. Modélisation et étude de la vitesse d'un chariot pendant son freinage

Un chariot de fête foraine avance à 20 m·s⁻¹ avant d'être ralenti par un système de freinage. Sa vitesse est modélisée par une équation différentielle, puis étudiée pour déterminer son évolution, la distance parcourue et des propriétés locales de sa courbe.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre sur l'intervalle considéré l'équation différentielle homogène y' + 0,8y = 0.

L'équation est de la forme $y' + ay = 0$, avec $a = 0,8$. La formule fournie donne toutes ses solutions sur $[0; +\infty[$: $y(t) = ke^{-at}$, où k est une constante réelle. Cette famille vérifie l'équation et comprend donc l'ensemble des solutions recherchées.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. La fonction g est définie sur [0 ; +∞[par g(t) = 5. Vérifier qu'elle est solution de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

La fonction g est constante, donc $g'(t) = 0$. En remplaçant g et sa dérivée dans le membre de gauche, on obtient $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$. L'égalité étant vérifiée pour tout $t \geq 0$, la fonction proposée est bien une solution de l'équation différentielle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 5$ est une solution de $y' + 0,8y = 4$.

Question 1.c. Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

La fonction constante $g(t) = 5$ est une solution particulière de l'équation avec second membre. Toute autre solution s'obtient en lui ajoutant une solution de l'équation homogène, soit $ke^{-0,8t}$. On obtient ainsi toutes les solutions sur l'intervalle considéré, en laissant varier la constante réelle k.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 5 + ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4 qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

La solution générale est $y(t) = 5 + ke^{-0,8t}$. La condition initiale impose $f(0) = 5 + ke^0 = 20$. Comme $e^0 = 1$, on trouve $k = 20 - 5 = 15$. En remplaçant la constante par cette valeur dans la solution générale, on obtient l'expression de la vitesse du chariot pendant le freinage.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1.a. À partir de l'expression f(t) = 15e^(-0,8t) + 5, démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ vaut 5.

Quand $t \to +\infty$, on a $-0,8t \to -\infty$, donc $e^{-0,8t} \to 0$. Dans $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, le terme exponentiel tend alors vers 0 et le terme constant reste égal à 5. La limite de la fonction est donc égale à 5.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1.b. Déduire de la limite précédente que la courbe C admet une asymptote, puis en donner une équation.

La fonction tend vers la valeur finie 5 lorsque t tend vers $+\infty$. Sa courbe représentative admet donc une asymptote horizontale dont l'ordonnée est cette limite. L'équation de cette droite est ainsi donnée par $y = 5$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. Sachant que f'(t) = -12e^(-0,8t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

Pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle est strictement positive, donc $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$. La fonction est strictement décroissante sur son domaine. Elle commence à $f(0) = 20$ et tend vers 5 à l'infini.

t	**0**		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	
$f(t)$	20	$\searrow$	5

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît strictement de 20 vers 5 sur $[0; +\infty[$.

Question 3. Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,8t} > 0$, donc $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$. La vitesse diminue, mais reste toujours supérieure à 5 et tend vers $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Elle n'atteint donc jamais zéro selon le modèle. Le système de freinage ne permet pas au chariot de s'arrêter.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Non : la vitesse tend vers $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, pas vers zéro.

Question 4.a. La fonction F est définie par F(t) = -18,75e^(-0,8t) + 5t. Vérifier qu'elle est une primitive de f sur [0 ; +∞[.

En dérivant $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$, la dérivée du terme exponentiel est $-18,75 \times (-0,8)e^{-0,8t} = 15e^{-0,8t}$, et celle de $5t$ est 5. Ainsi, $F'(t) = 15e^{-0,8t} + 5 = f(t)$. La fonction F est donc une primitive de f.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$F'(t) = f(t)$: F est une primitive de f.

Question 4.b. Calculer la valeur exacte de la distance parcourue entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$ à l'aide de l'intégrale de la vitesse, puis donner une valeur arrondie au centimètre.

La distance parcourue est $d = \int_0^1 f(t)\,dt = F(1) - F(0)$. En utilisant la primitive donnée, on obtient $d = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$. Cette valeur exacte est en mètres ; son arrondi au centimètre est $15,33$ m.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$ m, soit $15,33$ m au centimètre près.

Partie C - Étude locale

Question 1. Parmi les propositions, recopier l'unique expression correcte du développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Aucune justification n'est demandée. Une réponse fausse, multiple ou absente ne rapporte ni n'enlève de point.

Le polynôme affiché par le logiciel est $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. Parmi les propositions, la bonne est celle qui ajoute un reste de la forme $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$. Il s'agit de la troisième proposition.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 20 - 12t + 4,8t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\lim\limits_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente en 0 est $y = f(0) + f'(0)t$. On lit dans l'expression de f que $f(0) = 15e^0 + 5 = 20$. De plus, $f'(0) = -12e^0 = -12$. En reportant l'ordonnée du point et la pente dans l'équation de la tangente, on obtient la droite recherchée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$T : y = 20 - 12t$.

2. Transformées de Laplace et réponse d'un système électrique

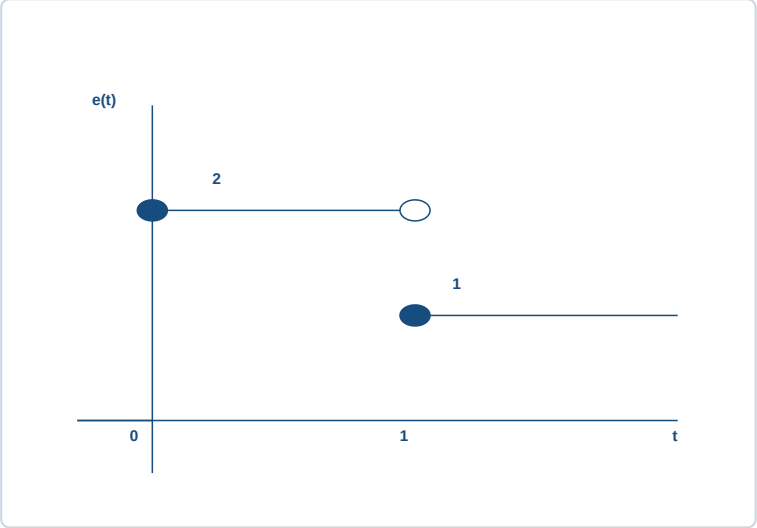
Un système électrique entrée-sortie reçoit le signal causal e(t) = 2U(t) - U(t - 1), et sa fonction de transfert est donnée. Les transformées de Laplace servent à déterminer le signal de sortie, à exprimer celui-ci par intervalles et à représenter les signaux.

Partie A - Signal d'entrée

Question 1. Tracer sur le document-réponse à rendre avec la copie la courbe représentative de la fonction e(t) = 2U(t) - U(t - 1).

Le signal est nul avant 0. À partir de 0, il vaut 2 jusqu'à l'instant 1 exclu, puis vaut 1 dès t = 1. Les sauts doivent être représentés avec des extrémités ouvertes et fermées cohérentes.

Signal d'entrée e(t)



✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$e(t) = 0$ si $t < 0$, $e(t) = 2$ si $0 \leq t < 1$, et $e(t) = 1$ si $t \geq 1$.

Question 2. Déterminer la transformée de Laplace E(p) du signal d'entrée.

La transformée de $U(t)$ est $1/p$. Par linéarité et par la formule du retard, celle de $U(t-1)$ est e^{-p}/p. On obtient donc $E(p) = 2/p - e^{-p}/p$.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$$E(p) = \frac{2 - e^{-p}}{p}.$$

Partie B - Signal de sortie

Question 1. À l'aide de la relation S(p) = H(p)E(p), démontrer que S(p) = 2/[p(p + 1)] - [1/[p(p + 1)]]e^(-p).

On utilise $S(p) = H(p)E(p)$, avec $H(p) = 1/(p+1)$ et $E(p) = (2 - e^{-p})/p$. Le produit se sépare en deux termes :

$$S(p) = \frac{2 - e^{-p}}{p(p+1)} = \frac{2}{p(p+1)} - \frac{e^{-p}}{p(p+1)}.$$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $$S(p) = \frac{2}{p(p+1)} - \frac{e^{-p}}{p(p+1)}.$$

Question 2. Vérifier l'égalité 1/[p(p + 1)] = 1/p - 1/(p + 1).

En réduisant au même dénominateur, on obtient $\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} = \frac{(p+1)-p}{p(p+1)}$. Le numérateur vaut 1 : l'égalité est vérifiée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $$\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

Question 3. Donner les transformées de Laplace inverses de 1/p, de 1/(p + 1), de e^(-p)/p et de e^(-p)/(p + 1), en utilisant le formulaire.

Le facteur e^{-p} correspond à un retard d'une unité. On applique la transformée inverse usuelle puis la formule de translation indiquée dans le formulaire.

Transformée	Transformée inverse
$1/p$	$U(t)$
$1/(p+1)$	$e^{-t}U(t)$
e^{-p}/p	$U(t-1)$
$e^{-p}/(p+1)$	$e^{-(t-1)}U(t-1)$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Dans l'ordre demandé : $U(t)$, $e^{-t}U(t)$, $U(t-1)$, $e^{-(t-1)}U(t-1)$.

Question 4. Déduire des résultats précédents l'expression du signal de sortie s(t) sur l'intervalle [0 ; 1[.

La décomposition en éléments simples donne $S(p) = 2\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) - e^{-p}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right)$. Pour $0 \leq t < 1$, les termes retardés sont nuls. L'inverse des deux premiers termes fournit alors l'expression demandée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour $0 \leq t < 1$, $s(t) = 2(1 - e^{-t})$.

Question 5.a. Sachant que s(t) = (e - 2)e^(-t) + 1 sur [1 ; +∞[, calculer s(1), d'abord sous forme exacte puis sous forme approchée au dixième.

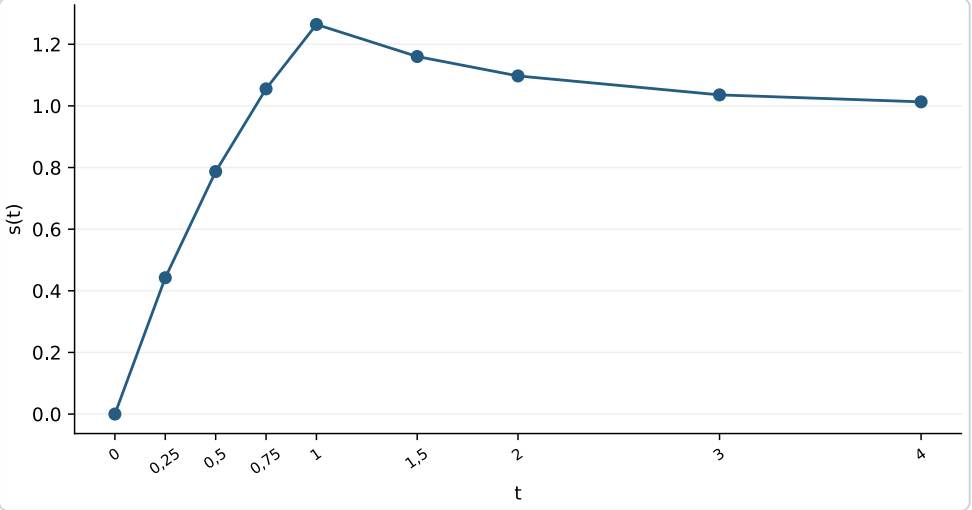
À $t = 1$, la formule donnée fournit $s(1) = (e-2)e^{-1} + 1 = 1 + (e-2)/e = 2 - 2/e$. Avec $e \approx 2{,}718$, on obtient environ $1{,}264$, soit $1{,}3$ au dixième.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$s(1) = 2 - \dfrac{2}{e} \approx 1{,}3$.

Question 5.b. Compléter sur le document-réponse à rendre avec la copie la courbe représentative de la fonction s.

Sur $[0; 1[$, on trace $s(t) = 2(1 - e^{-t})$. À partir de 1, on trace $s(t) = 1 + (e-2)e^{-t}$. Les deux expressions donnent la même valeur au raccord, $s(1) = 2 - 2/e$, puis la courbe décroît vers 1.



✓ RÉPONSE À RETENIR

La courbe part de 0, passe par $(1; 2 - 2/e)$, puis décroît vers l'asymptote $s = 1$.

Question 5.c. Donner la limite de la fonction s(t) lorsque t tend vers +∞.

Pour $t \geq 1$, $s(t) = 1 + (e-2)e^{-t}$. Lorsque t tend vers $+\infty$, e^{-t} tend vers 0. Le terme exponentiel disparaît donc dans la limite.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$\lim\limits_{t \to +\infty} s(t) = 1.$

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2022, porte le code 22MATGRB2 et dure deux heures. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Elle étudie le freinage d'un chariot et la réponse d'un système électrique, évaluant équations différentielles, étude de fonctions, intégrales, développements limités et transformées de Laplace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' + ay = b, la solution générale est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène associée.
- Si f(t) tend vers L quand t tend vers +∞, la courbe de f admet l'asymptote horizontale d'équation y = L.
- La distance parcourue entre t_0 et t_1 est l'intégrale de la vitesse : d = ∫[t_0,t_1] f(t)dt.
- Un retard temporel de a unités correspond, en transformée de Laplace, à une multiplication par e^(-ap).

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les unités : f est une vitesse en m·s^{-1}, t est en secondes et l'intégrale de la vitesse donne une distance en mètres.
- Pour l'équation différentielle, vérifier la solution particulière puis appliquer la condition initiale à la solution générale.
- Pour le tableau de variation, étudier le signe de la dérivée et prendre en compte les limites aux bornes de l'intervalle.
- Avec un échelon retardé, appliquer le facteur e^(-ap) et utiliser la propriété de retard du formulaire pour revenir au domaine temporel.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment calculer la distance parcourue à partir de la fonction de vitesse ?

On intègre la vitesse sur l'intervalle de temps étudié. Si F est une primitive de f, la distance entre t_0 et t_1 vaut F(t_1) - F(t_0). Le résultat s'exprime en mètres.

Q : Comment reconnaître l'asymptote horizontale de la vitesse du chariot ?

On calcule la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞. Si elle vaut un réel L, la courbe admet l'asymptote horizontale d'équation y = L. Dans ce sujet, il faut aussi interpréter cette limite comme une vitesse.

Q : Comment organiser les deux heures pour traiter les exercices ?

Les deux exercices valent chacun 10 points et les trois parties de l'exercice 1 peuvent être traitées indépendamment. Repérez les questions accessibles, répartissez le temps entre les exercices et gardez quelques minutes pour vérifier calculs et unités.

Q : Quelles précautions prendre pour les transformées de Laplace avec retard ?

Utilisez le formulaire et distinguez le signal causal de sa transformée. Un retard d'une unité introduit le facteur e^(-p) ; appliquez la propriété de retard aux expressions décomposées, puis vérifiez le résultat sur les intervalles demandés.

Sujet officiel associé (PDF) : https://coursbtstourisme.fr/assets/annales/bts-tourisme/E2 - Mathématiques/2022/BTS Tourisme - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf
Ressources BTS Tourisme : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.