Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2, sauf pour la spécialité Traitement des matériaux : 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Freinage d'un chariot de fête foraine (12 questions) **Page 3**

2. Contrôle de conformité et durée de vie de tubes fluorescents, estimation de la conformité des rivets (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://coursbtstourisme.fr/assets/annales/bts-tourisme/E2 - Mathématiques/2022/BTS Tourisme - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

1. Freinage d'un chariot de fête foraine

Un chariot se déplace à 20 m/s au début du freinage et sa vitesse est modélisée par une fonction f du temps. Trois parties indépendantes étudient une équation différentielle, les variations et la distance parcourue, puis le développement limité et la tangente à la courbe.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1. a. Résoudre l'équation différentielle homogène y' + 0,8y = 0.

Pour une équation homogène de la forme $y' + ay = 0$, les solutions sont $y(t) = Ce^{-at}$. Ici, $a = 0,8$ et C est une constante réelle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{-0,8t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 1. b. On définit g(t) = 5 sur [0 ; +∞[. Vérifier que g est une solution de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

1. Comme $g(t) = 5$ est constante, $g'(t) = 0$.
2. Alors $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$.

L'équation est vérifiée pour tout $t \geq 0$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 5$ est bien une solution de $y' + 0,8y = 4$.

Question 1. c. Déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

Les solutions de l'équation avec second membre s'obtiennent en ajoutant une solution particulière aux solutions de l'équation homogène associée. La fonction $g(t) = 5$ est une solution particulière.

$$y(t) = 5 + Ce^{-0,8t}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 5 + Ce^{-0,8t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4 qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

Dans la solution générale, la condition initiale donne $f(0) = 5 + Ce^0 = 20$. Ainsi, $C = 20 - 5 = 15$, d'où la solution recherchée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1. a. Pour f(t) = 15e^(-0,8t) + 5, démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.

Lorsque $t \to +\infty$, $-0,8t \to -\infty$, donc $e^{-0,8t} \to 0$. Par conséquent, le terme $15e^{-0,8t}$ tend vers 0, tandis que le terme constant reste égal à 5.

Ainsi, $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1. b. Déduire de la limite précédente que la courbe représentative C admet une asymptote et en donner une équation.

La limite de $f(t)$ en $+\infty$ est finie et vaut 5. La courbe C admet donc une asymptote horizontale d'ordonnée 5.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. Sachant que f'(t) = -12e^(-0,8t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

t	**0**	$+\infty$
Signe de $f'(t)$	$-$, car $-12e^{-0,8t} < 0$	
Variation de f	20	$\searrow 5$

La fonction est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$, de 20 vers sa limite 5.

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît de 20 vers 5 sur $[0; +\infty[$.

Question 3. À partir de l'étude de la fonction f, déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.

Le chariot s'arrêterait si sa vitesse atteignait 0. Or, pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,8t} > 0$, donc :

- $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$;
- la vitesse tend vers $5\ \mathrm{m\cdotp s^{-1}}$, et non vers 0.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non, le chariot ne s'arrête pas : sa vitesse tend vers $5\ \mathrm{m\cdotp s^{-1}}$.

Question 4. a. Pour F(t) = -18,75e^(-0,8t) + 5t, vérifier que F est une primitive de f sur [0 ; +∞[.

En dérivant $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$, on obtient $F'(t) = (-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} + 5 = 15e^{-0,8t} + 5$. Cette expression est égale à $f(t)$, donc F est une primitive de f.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F'(t) = f(t)$, donc F est une primitive de f.

Question 4. b. La distance parcourue entre les instants t₀ et t₁ est donnée par l'intégrale de f entre ces instants. Calculer la valeur exacte de la distance parcourue entre t₀ = 0 et t₁ = 1, puis donner une valeur arrondie au centimètre.

La distance vaut $d = F(1) - F(0)$. En utilisant la primitive donnée :

$$d = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 23,75 - 18,75e^{-0,8}\ \mathrm{m}.$$

Au centimètre près, cette distance est $15,33$ m.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}\ \mathrm{m} \approx 15,33\ \mathrm{m}$.

Partie C - Étude locale

Question 1. Question à choix multiples : recopier l'unique proposition donnant le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Aucune justification n'est demandée ; une réponse fausse, multiple ou absente ne rapporte ni n'enlève de point.

La proposition correcte est celle qui donne $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$. C'est la troisième proposition du QCM.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 20 - 12t + 4,8t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\lim\limits_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

La tangente en 0 a pour équation $y = f(0) + f'(0)t$. Or $f(0) = 20$ et, d'après l'expression de la dérivée, $f'(0) = -12$.

$$T : \ y = -12t + 20.$$

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $T : y = -12t + 20.$

2. Contrôle de conformité et durée de vie de tubes fluorescents, estimation de la conformité des rivets

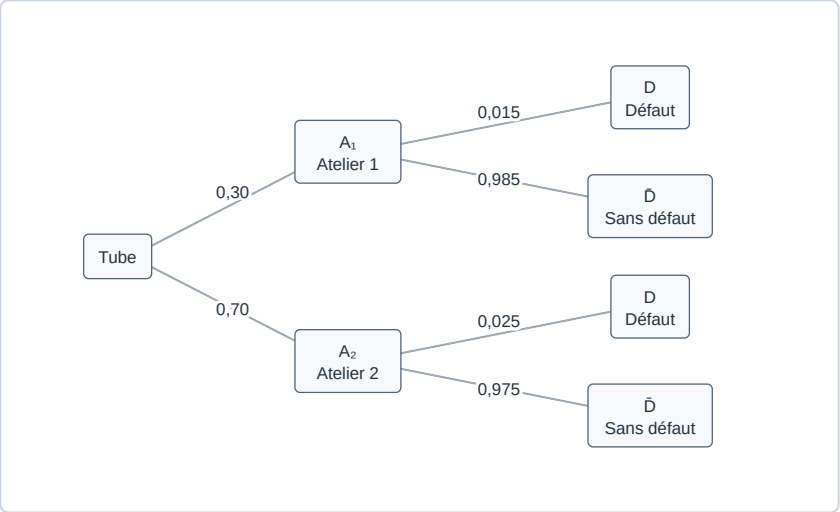
Une usine produit des tubes fluorescents dans deux ateliers, avec des taux de production et de défaut différents. L'exercice étudie les probabilités conditionnelles, la durée de vie des tubes selon une loi exponentielle et l'estimation de la proportion de rivets conformes par un intervalle de confiance.

Partie A - Probabilités conditionnelles

Question 1. Réaliser un arbre pondéré décrivant la production des deux ateliers et les probabilités qu'un tube présente ou non un défaut, à partir des données de l'énoncé.

La première bifurcation distingue les deux ateliers, qui représentent respectivement 30 % et 70 % de la production. Depuis chacun, on sépare les tubes défectueux des tubes sans défaut. Les probabilités conditionnelles sont 0,015 et 0,985 pour l'atelier 1, puis 0,025 et 0,975 pour l'atelier 2. Chaque paire de branches issues d'un même nœud totalise 1.

Arbre pondéré de production et de conformité



Probabilités inscrites sur chaque branche.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Arbre pondéré : voir le schéma. Branches : 0,30 ; 0,70 ; 0,015 ; 0,985 ; 0,025 ; 0,975.

Question 2. Calculer la probabilité P(A₁ ∩ D) qu'un tube provienne de l'atelier 1 et présente un défaut.

Pour obtenir la probabilité qu'un tube provienne de l'atelier 1 et soit défectueux, on multiplie la probabilité de choisir cet atelier par celle d'y observer un défaut. Les données de l'énoncé donnent ainsi $P(A_1 \cap D) = P(A_1) \times P(D \mid A_1) = 0,30 \times 0,015 = 0,0045$. Cette probabilité conjointe correspond à 0,45 % de la production totale.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(A_1 \cap D) = 0,0045$, soit 0,45 %.

Question 3. Montrer que la probabilité qu'un tube choisi au hasard présente un défaut est P(D) = 0,0195.

Les deux chemins de l'arbre qui aboutissent à un tube défectueux sont incompatibles. On additionne donc leurs probabilités : $P(D) = P(A_1)P(D \mid A_1) + P(A_2)P(D \mid A_2)$. Le calcul avec les taux indiqués dans l'énoncé donne $0,30 \times 0,015 + 0,70 \times 0,025 = 0,022$. La valeur 0,0195 imprimée dans la question est incompatible avec ces données.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Les données donnent $P(D) = 0,022$, soit 2,2 %, et non 0,0195.

Question 4. Sachant que le tube choisi ne présente pas de défaut, calculer la probabilité qu'il provienne de l'atelier 2.

On cherche $P(A_2 \mid \overline{D})$, soit la probabilité d'être issu de l'atelier 2 parmi les tubes sans défaut. La probabilité d'un tube de l'atelier 2 sans défaut est $0,70 \times 0,975 = 0,6825$. D'après le calcul précédent, la probabilité totale d'absence de défaut vaut $1 - 0,022 = 0,978$.

- On divise la probabilité conjointe par la probabilité d'absence de défaut.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(A_2 \mid \overline{D}) = 0,6825 / 0,978 \approx 0,698$, soit environ 69,8 %.

Partie B - Durée de vie des tubes fluorescents

Question 1. La durée de bon fonctionnement T suit une loi exponentielle de paramètre λ = 0,001. Déterminer son espérance E(T) et interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.

Pour une loi exponentielle de paramètre λ, la formule fournie est $E(T) = 1/\lambda$. En remplaçant λ par 0,001, on obtient $E(T) = 1/0,001 = 1\,000$ heures. Il s'agit du temps moyen de bon fonctionnement des tubes dans la population étudiée. Cette moyenne ne garantit pas qu'un tube particulier fonctionnera pendant 1 000 heures.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $E(T) = 1\,000$ heures : durée moyenne de bon fonctionnement.

Question 2. Calculer, en arrondissant au centième, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube fluorescent prélevé soit inférieure à 8 000 heures.

La formule donnée pour la loi exponentielle est $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Comme T est une variable continue, les événements $T < 8\,000$ et $T \leq 8\,000$ ont la même probabilité. On remplace alors t par 8 000 et λ par 0,001 : $1 - e^{-0,001 \times 8\,000} \approx 0,99966$, soit 1,00 au centième.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T < 8\,000) \approx 1,00$ au centième.

Question 3. Calculer, en arrondissant au centième, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube fluorescent prélevé soit supérieure à 10 000 heures.

Pour calculer la probabilité que la durée dépasse 10 000 heures, on utilise la probabilité complémentaire de la fonction de répartition : $P(T > t) = e^{-\lambda t}$. Avec les valeurs de l'énoncé, $P(T > 10\,000) = e^{-0,001 \times 10\,000} \approx 0,0000454$. Arrondie au centième comme demandé, cette valeur est 0,00.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T > 10\,000) \approx 0,00$ au centième.

Partie C - Intervalle de confiance

Question 1. Dans un échantillon de 1 000 rivets, 975 sont conformes. Donner une estimation ponctuelle de la proportion inconnue p de rivets conformes dans l'ensemble de la production.

L'estimation ponctuelle de la proportion inconnue est la fréquence des rivets conformes observée dans l'échantillon. On compte 975 rivets conformes parmi les 1 000 prélevés. Ainsi, $\hat{p} = 975/1\,000 = 0,975$. La proportion observée, qui sert d'estimation de la proportion dans toute la production, est donc de 97,5 %.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\hat{p} = 0,975$, soit 97,5 %.

Question 2. À l'aide de la formule fournie, déterminer un intervalle de confiance centré sur la fréquence observée pour la proportion p au niveau de confiance de 95 %. Arrondir les bornes de l'intervalle au millième.

La fréquence observée est $f = 0,975$ et l'effectif est $n = 1\,000$. On applique la formule fournie : $f \pm 1,96\sqrt{f(1-f)/n}$. La marge obtenue est environ 0,009677. On ajoute cette marge à f pour la borne supérieure et on la retranche pour la borne inférieure, puis on arrondit chaque borne au millième.

Borne	Calcul	Arrondie au millième
Inférieure	$0,975 - 0,009677$	0,965
Supérieure	$0,975 + 0,009677$	0,985

✓ RÉPONSE À RETENIR

Intervalle de confiance à 95 % : $[0,965\ ;\ 0,985]$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS Groupement B, session 2022, porte le code 22MATGRB1 et dure deux heures. Le coefficient est 2, sauf pour Traitement des matériaux où il est de 3. Les deux exercices portent sur le freinage d'un chariot et la production de tubes fluorescents et de rivets. Ils évaluent équations différentielles, étude de fonctions, probabilités, loi exponentielle et intervalle de confiance.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' + ay = b, additionner une solution particulière à la solution générale de l'équation homogène.
- Si f(t) tend vers L quand t tend vers +∞, la courbe admet l'asymptote horizontale d'équation y = L.
- Pour une loi exponentielle de paramètre λ, E(T) = 1/λ et P(T ≤ t) = 1 - e^(-λt).
- L'intervalle de confiance fourni est f ± 1,96√(f(1-f)/n), où f est la fréquence observée.

Points de vigilance & attentes du jury

- Utiliser la condition initiale pour déterminer la constante dans la solution de l'équation différentielle.
- Distinguer la limite de la vitesse de son annulation pour répondre à la question sur l'arrêt du chariot.
- Dans l'arbre pondéré, placer les probabilités conditionnelles et vérifier que les branches issues d'un même nœud totalisent 1.
- Vérifier les unités et respecter les arrondis demandés, notamment pour les durées et l'intervalle de confiance.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle du premier ordre de l'exercice ?

Résolvez d'abord l'équation homogène, puis ajoutez une solution particulière de l'équation complète. Ici, une solution particulière constante est fournie. La condition initiale permet ensuite de déterminer la constante de la solution générale.

Q : Comment calculer les probabilités avec la loi exponentielle des tubes ?

Avec le paramètre λ = 0,001 par heure, utilisez P(T ≤ t) = 1 - e^(-λt). Pour une durée supérieure à t, utilisez le complément e^(-λt). Exprimez t en heures afin de respecter les unités.

Q : Quel est le barème et comment gérer le temps de l'épreuve ?

L'épreuve dure deux heures et comprend deux exercices de 10 points chacun. La calculatrice en mode examen et la calculatrice sans mémoire de type collège sont autorisées. Répartissez le temps entre les exercices et gardez une marge pour vérifier les réponses.

Q : Quelles attentes de notation faut-il garder à l'esprit ?

Le sujet ne fournit pas de grille détaillée par étape. Présentez les calculs nécessaires, justifiez les résultats demandés et donnez les interprétations attendues. Respectez les unités et les arrondis indiqués, sans ajouter de précision non demandée.

Sujet officiel associé (PDF) : https://coursbtstourisme.fr/assets/annales/bts-tourisme/E2 - Mathématiques/2022/BTS Tourisme - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf
Ressources BTS Tourisme : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.